

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
ADOLF HAIMOVICI
Etapa locală-februarie 2013
Filiera tehnologică: profilul tehnic

Barem Clasa XII

1. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție

$$x * y = 9xy - 3x - 3y + \frac{4}{3}, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Să se demonstreze că $\left(\left(\frac{1}{3}, +\infty\right), *\right)$ este grup comutativ.

b) Să se găsească două numere $a, b \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ pentru care $a * b = 2$.

Soluție:

a) Demonstrarea axiomelor grupului.....5p

b) $x * y = 9xy - 3x - 3y + \frac{4}{3} = (3x - 1)(3y - 1) + \frac{1}{3}$

$(3x - 1)(3y - 1) = \frac{5}{3}$1p

un exemplu ar putea fi $3x - 1 = \frac{5}{3}$, iar $3y - 1 = 1$, $x = \frac{8}{9}$, $y = \frac{2}{3}$1p

2. Pe mulțimea $H = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ se definește legea de compoziție

$$x * y = \begin{cases} x - y, & x \geq y \\ x + y, & x < y \leq 2, \forall x, y \in H. \\ y - x, & x \leq 3 \text{ și } y > 2 \end{cases}$$

a) Să se alcătuiască tabla acestei legi.

b) Să se calculeze de la stânga la dreapta, valoarea numărului

$$1 * 2 * 3 * 4 * 3 * 2 * 1$$

Soluție:

a)

*	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	0	3	2	3
2	2	1	0	1	2
3	3	2	1	0	1
4	4	3	2	1	0

completarea corecta a tablei.....5p

b) $1 * 2 * 3 * 4 * 3 * 2 * 1 = 3 * 3 * 4 * 3 * 2 * 1 = 0 * 4 * 3 * 2 * 1 = 4 * 3 * 2 * 1 = 1 * 2 * 1 = 3 * 1 = 2$2p

3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$

a) Să se calculeze $\int_{-1}^3 |x| f(-1) \cdot f(3) dx$.

b) Să se determine cel mai mic număr natural m pentru care

$$\int_{-1}^1 [f^2(1 - x) - 4] dx < m.$$

c) Să se arate că $\int_{\frac{1}{e}}^e \frac{x-2}{f^2(x)-5} dx \in \mathbb{N}$

Soluție:

a) $\int_{-1}^3 |x| f(-1) \cdot f(3) dx = 8 \int_{-1}^3 |x| dx$1p

- $= -8 \int_{-1}^0 x dx + 8 \int_0^3 x dx = 40$2p
- b) $\int_{-1}^1 [f^2(1-x) - 4] dx = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$1p
- $\frac{2}{3} < m \Rightarrow m = 1$1p
- c) $\int_{\frac{1}{e}}^e \frac{x-2}{f^2(x)-5} dx = \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{1}{x} dx = 2 \in \mathbb{N}$2p

4. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x < 0 \\ 2 + \sin x, & x \geq 0 \end{cases}$

- a) Să se demonstreze că funcția admite primitive pe \mathbb{R} .
b) Să se determine primitiva care se anulează în 0.

Soluție:

- a) Funcția f este continuă pe intervalele $(-\infty, 0)$ și $(0, \infty)$ fiind elementară.....1p
Studiem continuitatea în 0: $l_s(0) = l_d(0) = f(0) = 2$1p
 f continuă pe \mathbb{R} , deci admite primitive pe \mathbb{R}1p
- b) Orice primitivă este de forma $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + 2x + C_1, & x < 0 \\ 2x - \cos x + C_2, & x \geq 0 \end{cases}$2p
- Deoarece F este derivabilă este și continuă deci $F_s(0) = F_d(0)$ de unde se obține
că $C_1 = C_2 - 1$1p
- Deci $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + 2x + C_1, & x < 0 \\ 2x - \cos x + C_1 + 1, & x \geq 0 \end{cases}, F(0)=0$, deci $C_1 = 0$1p